8° μαθημα:

16/4/2019

Το Πρόβλημα των Κανονικών Εξισώσεων:

$(q^*, p) = (f, p) \ \forall \ p \in P_n \ , \ p(x) = x^i, \ i = 0, 1, \dots, n$

Η f ορίζεται στο σύνολο σημείων $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$A \cdot \xi = b$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = (x^i, x^j)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \ , \ \xi = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$b_i = (x^i, f) = \sum_{k=1}^{f} x^i f_i$

$q^*(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} 1 & \sum_{k=1}^{m} x_k & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n} \\ \sum_{k=1}^{m} x_k & \sum_{k=1}^{m} x_k^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n+2} \\ \vdots & & & \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^{n} & \sum_{k=1}^{m} x_k^{n+1} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} x_k^{2n} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} f_k \\ \sum_{k=1}^{m} x_k f_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} x_k^{n} \cdot f_k \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}$$

$$A = X^T X \rightarrow b = X^T \cdot \hat{f} \quad \text{όπου} \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}^m} \| X - \hat{f} \|_2$$

$$X_\xi = \begin{bmatrix} x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 \cdot x_1^2 + \dots + \xi_n x_1^n \\ \xi_0 + \xi_1 \cdot x_2 + \xi_2 \cdot x_2^2 + \dots + \xi_n \cdot x_2^n \\ \vdots \\ \xi_0 + \xi_1 x_m + \xi_2 \cdot x_m^2 + \dots + \xi_m \cdot x_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^*(x_1) \\ q^*(x_2) \\ \vdots \\ q^*(x_m) \end{bmatrix}$$

Άσκηση 9: Να βρεθεί η Π.Ε.Τ. της x^4 ορισμένης στο $X_4 = \{-2, -1, 1, 2\}$ στο P_2

Λύση:

α' τρόπος: (Σύστημα Κανονικών Εξισώσεων)

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	16	1	1	16

συνέχεια...

Βοηθητικός πίνακας:

1	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$x_k f_k$	$x_k^2 f_k$
1	-2	4	-8	16	-32	64
1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	32	64
Άθροισμα 4	0	10	0	34	0	130

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 130 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \xi = b \Leftrightarrow \left\{ 10\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = 0 \right.$$

Άρα λύνω το $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 130 \end{bmatrix}$

με την μέθοδο Gauss.

Μετά από πράξεις κ' επίλυσης του συστήματος έχουμε: $[\xi_0, \xi_1]^T = [-4, 5]$

Άρα $q^*(x) = 5x^2 - 4$.

β' τρόπος: ορθογώνιο πολυώνυμα.

Πρέπει να βρούμε 3 πολυώνυμα $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ αφού είμαστε στο P_2

Έχουμε $P_0(x)=1$

$$P_1(x) = x - \frac{(x_1, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \frac{-2\cdot\overset{\to P_0}{1} + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = x$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot P_0(x) - \frac{(x^2, P_1)}{(P_1, P_1)} \cdot P_2(x) =$$

$$= x^2 - \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2}{4} \cdot 1 - \frac{(-2)^3 + (-1)^3 + 1^3 + 2^3}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot x =$$

$$= x^2 - \frac{5}{2} \quad \text{Άρα } P_2(x) = x^2 - \frac{5}{2}$$

Πρέπει να βρούμε τα λ.

Έχουμε:

$(P_0, P_0) = 4$, $(P_1, P_1) = 10$

$$(P_2, P_2) = \left((-2)^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left((-1)^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(1^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(2^2 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9$$

Άρα $(P_2, P_2) = 9$

$(f, P_0) = 34$, $(f, P_1) = 0$

$$(f, P_2) = 16 \cdot \frac{3}{2} + 1\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 16 \cdot \frac{3}{2} = 45$$

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = 0, \quad \lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{45}{3} = 5.$$

$$q_2^* = \lambda_0 \cdot P_0(x) + \lambda_1 \cdot P_1(x) + \lambda_2 \cdot P_2(x) = \frac{17}{2} + 5\left(x^2 - \frac{5}{2}\right) =$$

$$= 5x^2 - 4.$$

Άρα $q^*(x) = 5x^2 - 4$.

Άσκηση 11:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1	-1	1	-1

στον P_2

Α τρόπος: (Σύστημα κανονικών Εξισώσεων)

Φτιάχνουμε τον βοηθητικό πίνακα.

1	x	x^2	x^3	x^4	f_k	$x_k f_k$	$x_k^2 f_k$
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	-1	-2	-4
1	3	9	27	81	1	3	9
1	4	16	64	256	-1	-4	-16
5	10	30	100	354	0	-2	-10

Άρα λύνουμε το σύστημα $A \cdot \xi = b$

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 30 & 0 \\ 10 & 30 & 100 & -2 \\ 30 & 100 & 354 & -10 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & 40 & -2 \\ 0 & 40 & 174 & -10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & 40 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -2 \end{array}\right)$$

$$14\xi_2 = -2 \Rightarrow \xi_2 = -\frac{1}{7}$$

$$\xi_1 = 13/35$$

$$\xi_0 = 4/35$$

Άρα $\begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{35}, & \frac{13}{35}, & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Άρα $q^*(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{13}{35}x + \frac{4}{35}.$

Β' τρόπος (ορθογώνιο πολυώνυμα - με αναδρομική σχέση)

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} \cdot P_0(x) = x - \frac{0\cdot1 + 1\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 + 4\cdot1}{1 + 1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1} \cdot 1 =$

$= x - 2$

Αναδρομική Σχέση $P_2(x) = (x - a_1) \cdot P_1(x) - b_1 \cdot P_0(x)$

όπου $a_1 = \frac{(x \cdot P_1, P_1)}{(P_1, P_1)}$, $b_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{10}{5} = 2$

$(P_1, P_1) = (0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (4-2)^2 = 10$

$(x P_1, P_1) = 0\cdot(-2)^2 + 1\cdot(-1)^2 + 2\cdot0^2 + 3\cdot1^2 + 4\cdot2^2 = 20$

Άρα $a_1 = \frac{20}{10} = 2$

Άρα $P_2(x) = (x-2)(x-2) - 2$

$P_2(x) = x^2 - 4x + 2$

$P_2(0) = 2$, $P_2(1) = -1$, $P_2(2) = -2$, $P_2(3) = -1$, $P_2(4) = 2$

$(P_2, P_2) = 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 14$

$(f, P_0) = 0 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$(f, P_1) = 0\cdot(-2) + 1(-1) - 1 \cdot 0 + 1\cdot1 - 1\cdot2 = -2$

$(f, P_2) = 0\cdot2 + 1\cdot(-1) - 1(-2) + 1\cdot(-1) - 1\cdot2 = -2$

$q_2^*(x) = \lambda_0 \cdot P_0(x) + \lambda_1 \cdot P_1(x) + \lambda_2 \cdot P_2(x) =$

$= -\frac{1}{5}(x-2) - \frac{1}{7}(x^2 - 4x + 2) =$

$= -\frac{1}{7}x^2 + \frac{13}{35}x + \frac{4}{35}.$